$\boxed{3}$ 分散と標準偏差

確率変数 X が下の分布に従うとする.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

このとき,X の分散は $V(X)$ と表し,

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

で定義される. この式を変形すると, 次の公式が得られる.

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

X の期待値 (平均) を m とし, まとめると

$$\boxed{V(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k - m)^2 p_k = (x_1 - m)^2 p_1 + (x_2 - m)^2 p_2 + \cdots\cdots + (x_n - m)^2 p_n \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 p_k - m^2 = ({x_1}^2 p_1 + {x_2}^2 p_2 + \cdots\cdots + {x_n}^2 p_n) - m^2 \end{cases}}$$

分散 $V(X)$ の正の平方根を標準偏差といい $\sigma(X)$ と表す.

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

例題 3
さいころ 1 つを 1 回投げる試行において, 出た目の数を X とする.X の分散と標準偏差を求めよ.

解答

X の確率分布は

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

X の期待値は

$$1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

よって,X の分散は

$$\left(1 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(2 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(3 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(4 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(5 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(6 - \frac{7}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{35}{12} \quad \cdots\cdots (答)$$

標準偏差は $\sqrt{\frac{35}{12}} = \frac{\sqrt{105}}{6} \quad \cdots\cdots$ (答)

©2021 Keisuke Takahashi

別 分散の公式の利用
改めて確率分布を整理すると

X	1	2	3	4	5	6
X^2	1	4	9	16	25	36
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

よって,X の分散は

$$\left(1\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+9\cdot\frac{1}{6}+16\cdot\frac{1}{6}+25\cdot\frac{1}{6}+36\cdot\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

©2021 Keisuke Takahashi