

6 独立と従属の判定

$X, Y$  を確率変数とする.  $X$  のとる任意の値  $k$  と  $Y$  のとる任意の値  $l$  に対して,

$$\text{確率変数 } X \text{ と } Y \text{ が独立} \Leftrightarrow P(X = k, Y = l) = P(X = k)P(Y = l)$$

$X$  と  $Y$  が独立でないとき, 従属であるという.

また, 2つの事象  $A, B$  が起こる確率をそれぞれ  $P(A), P(B)$  とし,  $A$  かつ  $B$  が起こる確率を  $P(A \cap B)$  とすると,

$$\text{事象 } A \text{ と } B \text{ が独立} \Leftrightarrow \begin{cases} P_A(B) = P(B) \\ P(A \cap B) = P(A)P(B) \end{cases}$$

$A$  と  $B$  が独立でないとき, 従属であるという.

例題 6

- (1) 大小2つのさいころを1回投げ, 大きいさいころの出た目の数を  $X$ , 小さいさいころの出た目の数を  $Y$  とする.
- ①  $X = 2$  となる事象と  $Y = 3$  となる事象は独立か.
- ②  $X = 2$  となる事象と  $X + Y = 5$  となる事象は独立か.
- (2) コインを2回投げるとき, 1回目に表が出る事象を  $A$ , 2回のうち1回表が出る事象を  $B$  とする. 2つの事象  $A$  と  $B$  は独立か.

解答

- (1) ①  $P(X = 2) = \frac{1}{6}, P(Y = 3) = \frac{1}{6}$  である. また,  $P(X = 2, Y = 3) = \frac{1}{36}$  である. したがって,

$$P(X = 2, Y = 3) = P(X = 2) \cdot P(Y = 3)$$

が成り立つので独立である ……(答)

- ②  $P(X + Y = 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$  である.

また,  $P(X = 2, X + Y = 5) = P(X = 2, Y = 3) = \frac{1}{36}$  である. したがって,

$$P(X = 2, X + Y = 5) \neq P(X = 2) \cdot P(X + Y = 5)$$

となるから, 独立でない. すなわち従属である. ……(答)

- (2)  $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = {}_2C_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  である. また,  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$  であるから,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

が成り立つ. よって,  $A$  と  $B$  は独立である. ……(答)