$\boxed{15}$ 母比率の推定

母集団が, ある特性 A をもっているものともっていないものからなると考える. 母集団の中で特性 A をもつものの割合を**母比率**という. 母集団から大きさ n の標本を抽出し, その中で特性 A をもっているものの割合を**標本比率**という. 今回は標本比率 p' から母比率 p の推定を目指す.

母集団から大きさ n の標本を抽出し, この標本の中で特性 A をもつものが X 個あったとき, 標本比率 p' は $p'=\dfrac{X}{n}$ である. また,n 個中 X 個, 確率 p で特性 A をもつと考えられるから,X は二項分布 $B(n,p)$ に従うとみなせる. したがって,n が大きいとき X は近似的に正規分布 $N(np, np(1-p))$ に従う. よって,$Z=\dfrac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ とすると Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うから, 信頼度 95% の信頼区間は, $-1.96 \leqq Z \leqq 1.96$ より,

$$-1.96 \leqq \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqq 1.96$$

$$-1.96 \cdot \frac{1}{n} \leqq \frac{\frac{X}{n}-p}{\sqrt{np(1-p)}} \leqq 1.96 \cdot \frac{1}{n}$$

$$-1.96 \cdot \frac{\sqrt{np(1-p)}}{n} \leqq \frac{X}{n}-p \leqq 1.96 \cdot \frac{\sqrt{np(1-p)}}{n}$$

$$-1.96 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leqq \frac{X}{n}-p \leqq 1.96 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$\frac{X}{n}-1.96 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leqq p \leqq \frac{X}{n}+1.96 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$\dfrac{X}{n}=p'$ であるから,

$$p'-1.96 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leqq p \leqq p'+1.96 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

n が大きいとき, 標本比率と母比率は等しいと考えられるから,$p=p'$ とすると,

$$\boxed{p'-1.96 \cdot \sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}} \leqq p \leqq p'+1.96 \cdot \sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}}}$$

となる.

例題 15

ある工場で生産される製品の不良品率を調べるため, 無作為に選んだ 400 個の製品を調査した. 不良品が 8 個見つかったとき, 不良品率 p を信頼度 95% で推定せよ.

解答

標本比率は $\dfrac{8}{400}=\dfrac{1}{50}$ であるから,

$$1.96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{50}\cdot\left(1-\frac{1}{50}\right)}{400}}=0.01372$$

よって, 求める信頼区間は $0.02-0.01372 \leqq p \leqq 0.02+0.01372$ より,

$$0.00628 \leqq p \leqq 0.03372 \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$