$\boxed{10}$ 連続型確率変数の平均と分散

確率変数 X の取る値の範囲が $a \leqq X \leqq b$, 確率密度関数を $f(x)$ とする.
このとき, 平均 (期待値)$E(X)$ は

$$\boxed{E(X)=\int_a^b xf(x)dx}$$

で定義され, 分散 $V(X)$ はとびとびの値をとる離散型分布のときと同様に,
$V(X)=E((X-E(X))^2)$ で定義される. したがって,

$$\boxed{V(X)=\int_a^b (x-E(X))^2 f(x)dx}$$

となる. また, 公式 $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$ より

$$\boxed{V(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-(E(X))^2}$$

でも求められる.
また, 標準偏差 $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ で定義される.

例題 10
確率変数 X の確率密度関数が $f(x)=2x\ (0 \leqq x \leqq 1)$ で与えられているとき,X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ.

解答

$$E(X)=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}\left[x^3\right]_0^1=\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$V(X)=\int_0^1\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 f(x)dx=\int_0^1\left(2x^3-\frac{8}{3}x^2+\frac{8}{9}x\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{8}{9}x^3+\frac{4}{9}x^2\right]_0^1=\frac{1}{18} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

別 分散の公式の利用

$$V(X)=\int_0^1 x^2f(x)dx-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\int_0^1 2x^3dx-\frac{4}{9}$$

$$=\frac{1}{2}\left[x^4\right]_0^1-\frac{4}{9}=\frac{1}{18} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$