$\boxed{13}$　標本平均の平均と標準偏差

ある集団の特徴を調べたい. 集団全員を調査することが難しいとき, 集団から無作為に抽出したものを調査する方法がある. この方法を標本調査という.

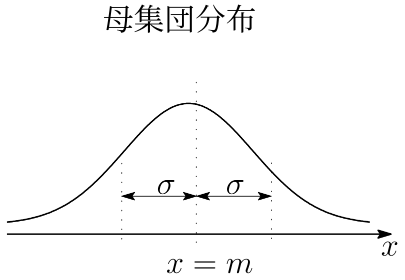
もとの集団を**母集団**といい, 母集団の平均を**母平均**, 標準偏差を**母標準偏差**という. 母集団から n 個の要素を無作為に抽出した集団を**大きさ n の標本**といい, この平均を**標本平均**, 標準偏差を**標本標準偏差**という.

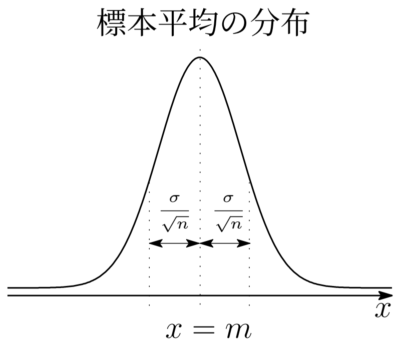
母平均 m, 母標準偏差 σ の母集団から, 大きさ n の標本 X_i $(n = 1, 2, \cdots\cdots, n)$ を抽出したとき, 標本平均を $\overline{X}$ と表す. すなわち,$\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_n}{n}$ である. 各 X_i は確率変数であり,$\overline{X}$ も標本を抽出するという試行から定まる確率変数である.

標本平均 $\overline{X}$ の平均 $E(\overline{X})$ と標準偏差 $\sigma(\overline{X})$ は,

$$\boxed{E(\overline{X}) = m \quad , \quad \sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

となる.





母平均 m, 母標準偏差 σ の母集団から, 大きさ n の標本を抽出したとき, 標本平均 $\overline{X}$ は $E(\overline{X}) = m, \sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ であり,n が大きいとき,

$$\boxed{\overline{X} \text{ は正規分布 } \left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right) \text{ に従う}}$$

とみなせる.

また, 母平均 m の集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき, その標本平均は,n が大きくなるにつれて, 母平均 m に近づく. このことを**大数の法則**という.

例題 13

母平均 50, 母標準偏差 10 をもつ母集団から大きさ 100 の標本を抽出する.

(1) 標本平均 $\overline{X}$ の平均 $E(\overline{X})$, 標準偏差 $\sigma(\overline{X})$ を求めよ.

(2) 標本平均が 51 以上である確率を求めよ.

解答

(1) 標本平均の平均は母平均と一致するから $E(\overline{X}) = 50 \quad \cdots\cdots$(答)

また,$\sigma(\overline{X}) = \dfrac{10}{\sqrt{100}} = 1 \quad \cdots\cdots$(答)

(2) $\overline{X}$ は正規分布 $N(50, 1^2)$ に従うとみなせるから,$Z = \dfrac{\overline{X} - 50}{1}$ とおくと,
Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. よって,

$$\begin{aligned} P(\overline{X} \geqq 51) &= P(Z \geqq 1) = 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 1) \\ &= 0.5 - 0.3413 = 0.1587 \quad \cdots\cdots\text{(答)} \end{aligned}$$

正規分布表の一部

z_0	0.00	$\cdots$
0.0	0.0000	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	
1.0	0.3413	$\cdots$

$P(0 \leqq Z \leqq 1) = 0.3413$