$\boxed{5}$ 複数の確率変数

X, Y を確率変数とするとき $X=a$ かつ $Y=b$ である確率を $P(X=a, Y=b)$ と表す.

X のとり得る値が $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$,$Y$ のとり得る値が $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_m$ であるとき, $X=x_i$ かつ $Y=y_j$ である確率 $P(X=x_i, Y=y_j)$ を考えることができ, この対応を X と Y の同時分布という. 例えば, 大小 2 つのさいころの出る目をそれぞれ X,Y とすれば同時分布は下の表のようになる.

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

また, 和 $X+Y$ の期待値について,

$$\boxed{E(X+Y)=E(X)+E(Y)}$$

が成り立つ. さらに, $\boxed{4}$ 変数変換の等式から $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$ が成り立つ.

例題 5

大小 2 つのさいころを 1 回投げ, 出た目に応じて得点が得られるゲームを行う. 大きいさいころの出た目の数を X, 小さいさいころの出た目の数を Y とする.

(1) 得点が $X+Y$ で与えられるとき, 得点の期待値を求めよ.

(2) 得点が $2X+3Y$ で与えられるとき, 得点の期待値を求めよ.

(3) 大きいさいころだけを 10 回投げ,i 回目に出た目 X_i を得点とする. ただし,$1 \leqq i \leqq 10$ である. 総得点 $X_1+X_2+\cdots\cdots+X_{10}$ の期待値を求めよ.

$\boxed{\text{解答}}$

X の期待値 $E(X)$ は例題 2 より $E(X)=\dfrac{7}{2}$ であり, 同様に,$E(Y)=\dfrac{7}{2}$ である.

(1) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\dfrac{7}{2}+\dfrac{7}{2}=7 \quad \cdots\cdots$(答)

(2) $E(2X+3Y)=E(2X)+E(3Y)=2E(X)+3E(Y)=2\cdot\dfrac{7}{2}+3\cdot\dfrac{7}{2}=\dfrac{35}{2} \quad \cdots\cdots$(答)

(3) 求める期待値は

$$\begin{aligned}E(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_{10})&=E(X_1)+E(X_2)+\cdots\cdots+E(X_{10})\\&=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}+\cdots\cdots+\frac{7}{2}=\frac{7}{2}\times 10=35 \quad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$