## $\boxed{14}$ 母平均の推定

標本平均の平均は母平均と一致するが, 標本平均は確率変数であるから母平均と一致するとは限らない. そこで, 得られた標本平均から母平均が入る区間を推定してみよう.

例えば, 確率変数 $Z$ が標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとき,$-1 \leqq Z \leqq 1$ となる確率は正規分布表より 0.6826 である. これはデータの 68.26% が $-1 \leqq Z \leqq 1$ の範囲に入っていることを意味する.

ではデータの 95% が入る範囲を求めよう. それは表より,$-1.96 \leqq Z \leqq 1.96$ である. つまり, この範囲にデータの 95% が含まれる.

母平均 $m$, 母標準偏差 $\sigma$ をもつ母集団から大きさ $n$ の標本を抽出すると, $\boxed{13}$ より $\overline{X}$ は平均 $m$, 標準偏差 $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ となり,$n$ が大きければ正規分布 $N\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うとみなせる.

$Z = \dfrac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ とすると,$Z$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う.

データの 95% は $-1.96 \leqq Z \leqq 1.96$ の範囲にあることから,

$$-1.96 \leqq \frac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqq 1.96$$

$$-1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq \overline{X} - m \leqq 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

よって,

$$\boxed{\overline{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

となる. この範囲を信頼度 95% の**信頼区間**といい, $\left[\overline{X} - 1.96 \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + 1.96 \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ と表す.

※標本を抽出して信頼区間を求めるという試行を繰り返したとき, 母平均が入っている標本の現れる確率が 95% である, という意味である.

**例題 14**

320000 人を対象にある試験を行った. 試験の点数は正規分布に従うとする. 標準偏差が 20.0 点であったが, 平均点が公表されなかったため, 無作為に選ばれた 196 人の試験の点数をもとに平均点 $m$ を推定する.196 人の平均点が 60.0 点であったとき, 信頼度 95% の信頼区間を求めよ.

解答

信頼区間は

$$60 - 1.96 \cdot \frac{20}{\sqrt{196}} \leqq m \leqq 60 + 1.96 \cdot \frac{20}{\sqrt{196}}$$ より,

$57.2 \leqq m \leqq 62.8 \quad \cdots\cdots$ (答)