Appendix　仮説検定

ある硬貨を3回投げたとき,3回とも表が出たとする. この硬貨は表と裏の出る確率は $\dfrac{1}{2}$ といえるのだろうか. このことを仮説を立てて検証することを仮説検定という.

今, 考えられる結論は2通りで,

・結論1:硬貨の表裏の出る確率は等しく $\dfrac{1}{2}$

・結論2:表の方が出やすい

この場合, 結論2であること疑っている, つまり主張したい. これを否定した仮説「硬貨の表裏の出る確率は等しく $\dfrac{1}{2}$ (結論1)」を**帰無仮説**といい H_0 と表す. 一方で主張したい仮説 (結論2) を**対立仮説**といい H_1 と表す. 実際に仮説を立てる.
表の出る確率を p とすると,

$\mathrm{H}_0 : p = \dfrac{1}{2}$

$\mathrm{H}_1 : p > \dfrac{1}{2}$

H_0 のもとで3回とも表が出る確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.125$$

となる. これは稀なことなのかどうかを判断する基準が必要になる. この基準を**有意水準**, または危険率と呼ぶ. 例えば有意水準5%で検定すると,

$0.125 > 0.05$

であるから, めったに起こらないとは判断できない. したがって,H_0 を否定することができない. このような場合,H_0 を**受容する**, または**採択する**という.

では, この硬貨を10回投げ,9回表が出た場合はどうだろうか. 仮説は上と同じで,

$\mathrm{H}_0 : p = \dfrac{1}{2}$

$\mathrm{H}_1 : p > \dfrac{1}{2}$

この場合は, 硬貨を10回投げ9回以上表出る確率を計算する. すると,

$${}_{10}\mathrm{C}_9 \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 0.0107421875$$

となり0.05より小さいので, 非常に珍しいことが起こったと判断できる. このとき,H_0 を**棄却する**といい,H_1 を採択するという.

※確率が小さくても起こる確率は0でないので,$p = \dfrac{1}{2}$ であったとしてもたまたま珍しいことが起こってしまった可能性もある. つまり,H_0 が正しかったとしても, 棄却される危険がある. 危険率5%とはそういった意味である.

この硬貨を 64 回投げて表が 40 回出た場合, この硬貨がいかさまかどうかを有意水準 5% で検定しよう.
表の出る確率を p とする. この場合の仮説は,

$$\mathrm{H}_0 : p = \frac{1}{2}$$
$$\mathrm{H}_1 : p \neq \frac{1}{2}$$

として考える.
この検定の場合, 極端に大きい値と極端に小さい値の合計が 5% になる点を考える. つまり, 上から 2.5% までと下から 2.5% までの間は, 珍しいことが起こったと考えることにする.
表の出る回数 X は二項分布 $B\left(64, \frac{1}{2}\right)$ に従う. これは近似的に正規分布 $N(32, 16)$ に従うとみなせるから,$Z = \frac{X-32}{4}$ とおくと,

$$P(X \geqq 40) = P(Z \geqq 2) = 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 2) = 0.0228$$

これは 0.025 より小さいので, 稀なことが起こったと判断できる. したがって,H_0 を棄却し,H_1 を採択する.

また, これまで見てきた通り, 正規分布表より $-1.96 \leqq Z \leqq 1.96$ を満たす確率が 95% である. つまり,$|Z| \geqq 1.96$ を満たすとき,H_0 は棄却される. この範囲を**棄却域**という.